



Universidad de Huelva
ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR
Departamento de Ingeniería Minera,
Mecánica y Energética

Asignatura: **Ingeniería de Máquinas [570004027]**
5º curso de Ingenieros Industriales

**2º Tema.- Ampliación de análisis cinemático de
mecanismos planos mediante
métodos analíticos.**

Huelva, Oct. 2008
Profesor: Rafael Sánchez Sánchez

ÍNDICE

- 1. ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS PLANOS. MÉTODOS GRÁFICOS**
 - 1.1. Posición**
 - 1.1.1. Mecanismo de cuatro barras**
 - 1.1.2. Mecanismo de biela-manivela**
 - 1.2. Velocidad**
 - 1.2.1. Mecanismo de cuatro barras**
 - 1.2.2. Mecanismo de biela-manivela**
 - 1.3. Aceleración**
 - 1.3.1. Mecanismo de cuatro barras**
 - 1.3.2. Mecanismo de biela-manivela**

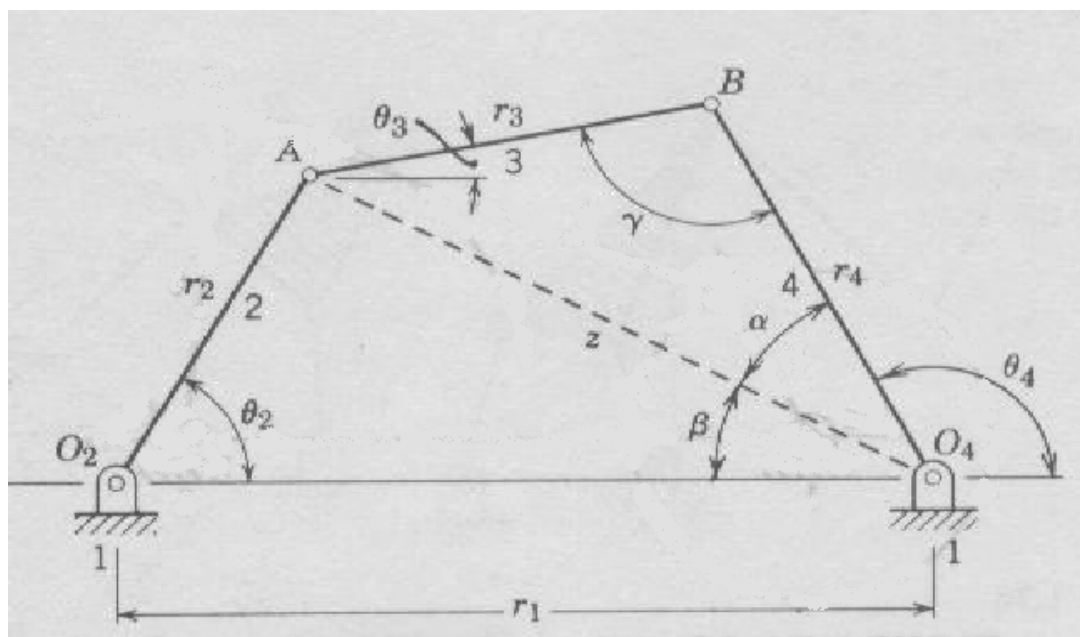
- 2. ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS PLANOS. MÉTODOS ALGEBRAICOS CLÁSICOS**
 - 2.1. Mecanismo de cuatro barras**
 - 2.1.1. Posición, mediante ecuaciones de cierre**
 - 2.1.2. Velocidad mediante ecuaciones de cierre y números complejos**
 - 2.1.3. Aceleración mediante ecuaciones de cierre y números complejos**
 - 2.2. Mecanismo de Biela-manivela**
 - 2.2.1. Posición, mediante ecuaciones de cierre y números complejos**
 - 2.2.2. Velocidad mediante ecuaciones de cierre y números complejos**
 - 2.2.3. Aceleración mediante ecuaciones de cierre y números complejos**

1. Análisis cinemático de mecanismos planos. Métodos gráficos.

1.1. Análisis de posición:

El análisis directo de posición consiste en determinar las coordenadas, y ángulos de referencia de los eslabones de los mecanismos, a partir de la posición de uno de ellos.

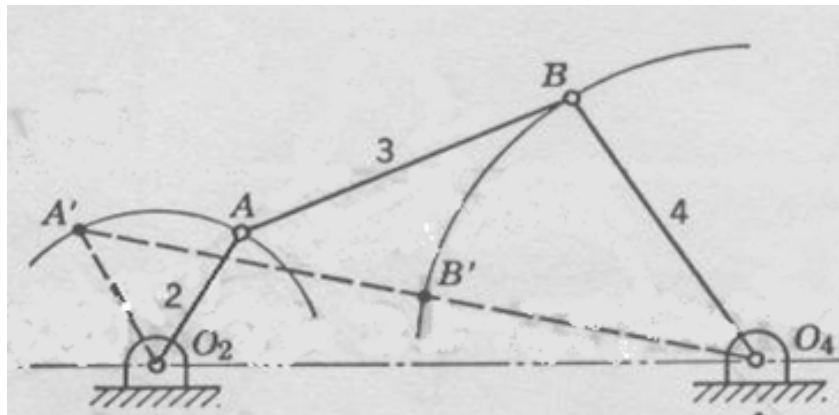
1.1.1.- Mecanismo de cuatro barras: Supongamos el mecanismo de la siguiente figura:



Supongamos que conocemos θ_2 y pretendemos calcular θ_3 y θ_4 , para ello simplemente dibujaremos el mecanismo a escala, e iremos situando las posiciones de las barras r_3 y r_4 para cada posición de la barra r_2 en función de su ángulo θ_2 .

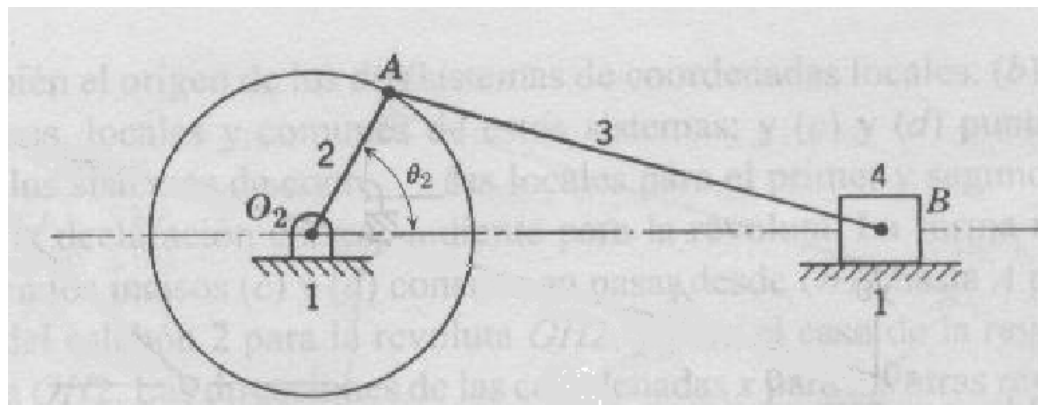
Obtendremos de una forma gráfica las distintas posiciones que adopta nuestro mecanismo de cuatro barras, para los

distintos valores de θ_2 . Tal como se muestra en la siguiente figura:



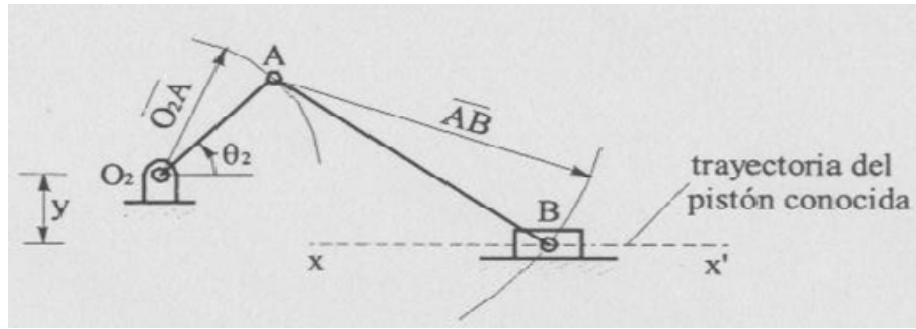
1.1.2.- Mecanismo de biela-manivela:

Vamos a analizar ahora otro de los mecanismos más típicos en cinemática. Para ello supongamos ahora que tenemos el mecanismo de la siguiente figura:



Supongamos que conocemos θ_2 y pretendemos calcular las distintas posiciones del eslabón 3 (biela) y del eslabón 4 (pistón). Para ello simplemente dibujaremos el mecanismo a escala, e iremos situando las posiciones de los eslabones 3 y 4 para cada posición de la manivela 2 en función de su ángulo θ_2 con ello obtendremos las diferentes trayectorias.

Con ello, obtendremos de una forma gráfica las distintas posiciones que adopta nuestro mecanismo de biela-manivela, para los distintos valores de θ_2 . Tal como se muestra en la siguiente figura:

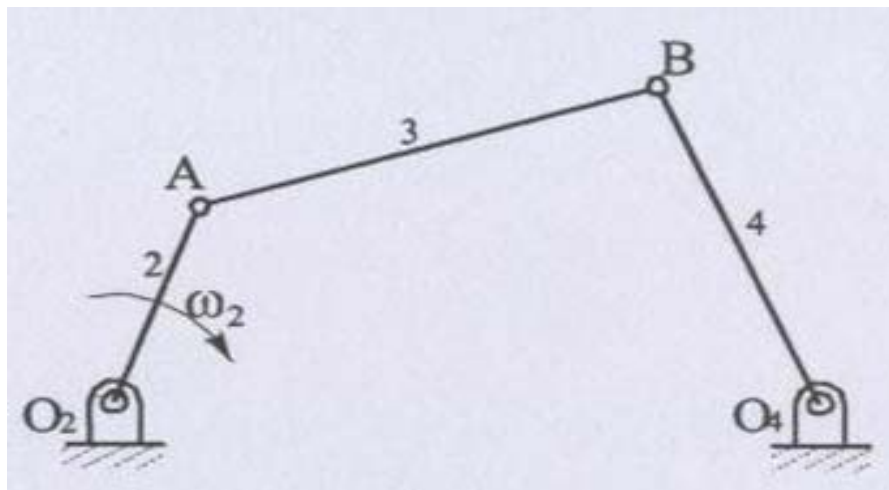


1.2. Análisis de velocidad:

El análisis de velocidad consiste en determinar las velocidades, de los eslabones del mecanismo, a partir de la posición y velocidad de uno de ellos.

1.2.1.- Mecanismo de cuatro barras:

Supongamos el anterior mecanismo de cuatro barras, y supongamos que en él, que el eslabón r_2 gira con una velocidad angular constante ω_2 en sentido horario, según se muestra en la figura siguiente:



Vamos a calcular inicialmente el vector V_a del nodo A. El módulo de dicho vector vendrá dado analíticamente por:

$$V_a = O_2A \cdot \omega_2$$

al tener el eslabón 2 un movimiento de rotación pura alrededor de O_2 .

También sabemos que la dirección del vector V_a será perpendicular a O_2A , y el sentido el de las agujas de reloj.

Por tanto la velocidad de A es totalmente conocida en modulo, dirección y sentido.

Vamos a analizar ahora el vector V_b del nodo B. El módulo de dicho vector vendrá dado por:

$$V_b = O_4B \cdot \omega_4 \quad (1)$$

ya que la barra 4 gira en un movimiento de rotación pura alrededor de O_4 pero en este caso desconocemos ω_4

Ahora bien, la dirección del vector V_b sí la sabemos, será perpendicular a O_4B (r_4).

Por otro lado, teniendo en cuenta las velocidades relativas, sabemos que vectorialmente:

$$\vec{V}_b = \vec{V}_a + \vec{V}_{ba} \quad (2)$$

de esta ecuación vectorial conocemos V_a y la dirección de V_b .

Si analizamos ahora aisladamente el cuerpo rígido formado por el eslabón r_3 , tendremos que:

$$V_{ba} = AB \cdot \omega_3$$

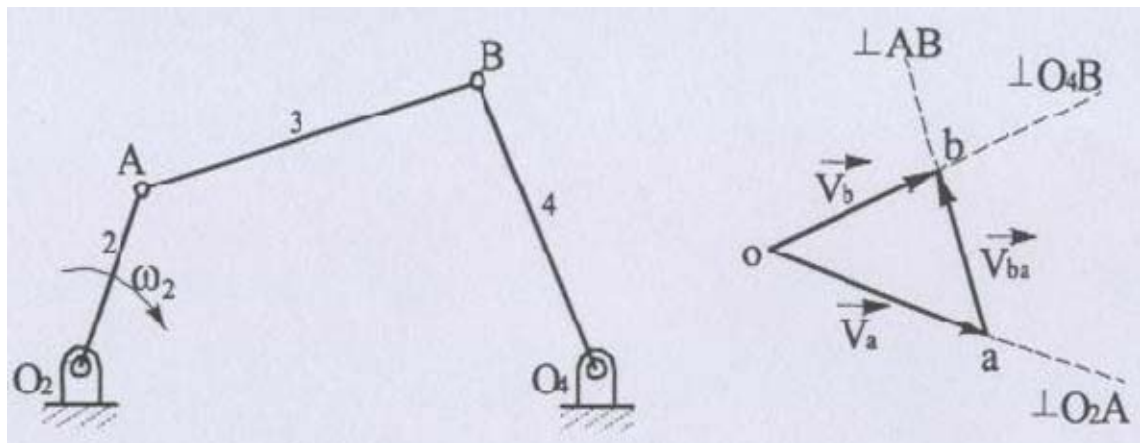
Pero aquí también desconocemos el valor de ω_3 , aunque sí conocemos la dirección de V_{ba} , que será perpendicular al eslabón AB (r_3).

Todo ello nos permite construir el polígono de velocidades, para resolver la ecuación vectorial (2).

Para construir dicho polígono, seguiremos los siguientes cuatro pasos:

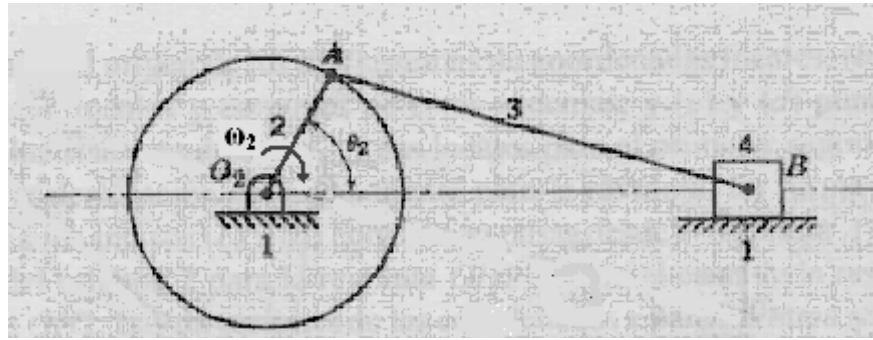
1. A escala y por un punto cualquiera [o] trazaremos V_a (al extremo de V_a llamamos: [a]).
2. Por [a] trazamos una perpendicular a r_3 (dirección de V_{ba}).
3. Por [o] trazamos una perpendicular a r_4 (dirección de V_b).
4. El punto de intersección de las dos perpendiculares [b] nos determina el extremo tanto de V_b como de V_{ba} .

Estos cuatro pasos para resolver la ecuación (2) y con ello calcular resolver el análisis de velocidades para el mecanismo de cuatro barras, lo podemos observar en la siguiente figura:



1.2.2.- Mecanismo de biela-manivela:

Vamos a analizar ahora de la misma manera el mecanismo de biela-manivela, para ello volveremos a la figura de la anterior diapositiva, y supongamos en ella que en el eslabón 2 (manivela) gira con una velocidad angular constante ω_2 en sentido horario



Igual que en el mecanismo de 4 barras, podemos calcular el vector V_a . El módulo de dicho vector vendrá dado por:

$$V_a = O_2A \cdot \omega_2$$

al tener la barra 2 un movimiento de rotación pura alrededor de O_2 .

La dirección del vector V_a será perpendicular a O_2A , y el sentido el de las agujas de reloj.

Por tanto la velocidad de A es totalmente conocida en módulo, dirección y sentido.

Por otro lado, teniendo en cuenta las velocidades relativas, sabemos que vectorialmente:

$$\vec{V}_b = \vec{V}_a + \vec{V}_{ba} \quad (2)$$

de esta ecuación vectorial conocemos V_a y la dirección de V_b , que será la recta XX'

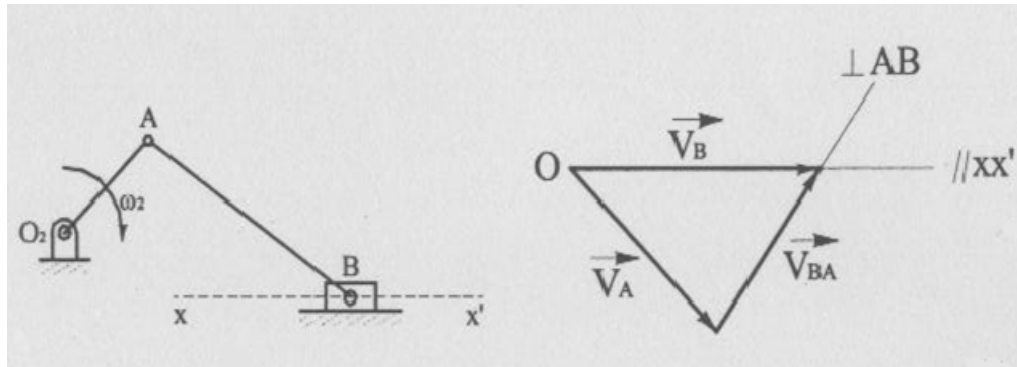
Si analizamos ahora aisladamente el cuerpo rígido formado por la biela, tendremos que:

$$V_{ba} = AB \cdot \omega_3$$

Pero aquí también desconocemos el valor de ω_3 , aunque sí conocemos la dirección de V_{ba} , que será perpendicular al eslabón AB (biela).

Todo ello nos permite construir el polígono de velocidades, para resolver la ecuación vectorial (2).

Con estos datos ya conocidos, y siguiendo los mismos cuatro pasos que dimos en el mecanismo de cuatro barras, construiremos el polígono de velocidades, tal como se puede observar en la siguiente figura:

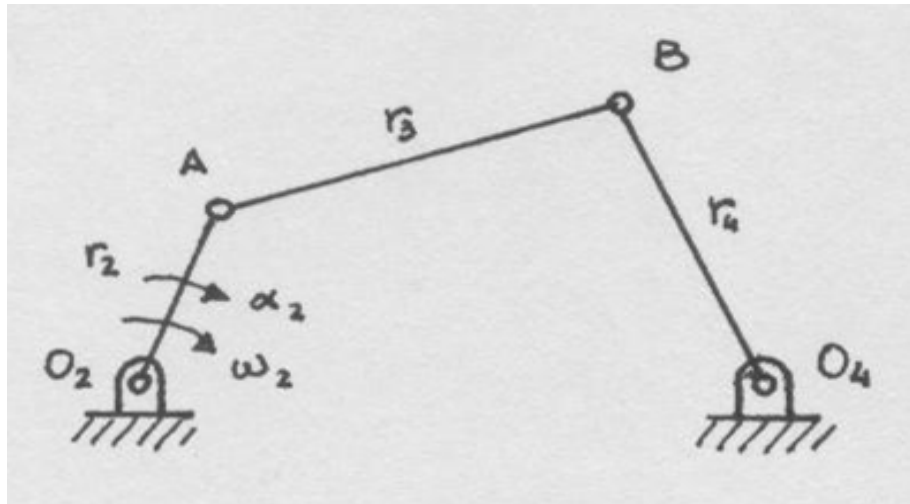


1.3.-Análisis de aceleración:

Análogamente a como definíamos el análisis de velocidad. El análisis de aceleración consiste en determinar las aceleraciones, de los eslabones que constituyen el mecanismo, a partir de la posición, velocidad y aceleración de uno de ellos.

1.3.1.- Mecanismo de cuatro barras:

Supongamos que en el mecanismo de cuatro barras que venimos analizando, en el, el eslabón r_2 gira, en un instante determinado, con una velocidad angular ω_2 , sometido a una aceleración angular α_2 constante en sentido horario, tal como se indica en la siguiente figura:



Si analizamos el eslabón r_2 como un sólido rígido girando, con un movimiento de rotación pura alrededor de O_2 , tendremos que el vector aceleración total (\vec{A}_a) del punto A vendrá dado por la ecuación vectorial:

$$\vec{A}_a = \vec{A}_{at} + \vec{A}_{an} \quad (1)$$

donde \vec{A}_{at} y \vec{A}_{an} son las aceleraciones tangencial y normal respectivamente.

La dirección del vector \vec{A}_{at} será tangencial a la trayectoria, y su presencia es debida igualmente al cambio de velocidad angular en el tiempo. Mientras que la dirección del vector \vec{A}_{an} señala siempre al centro de rotación, y su presencia se debe a la dirección cambiante del vector velocidad.

Los módulos de las componentes tangencial y normal de la aceleración del punto A, recordando el estudio del “sólido rígido” vendrán dadas por las expresiones:

$$|\vec{A}_{at}| = \alpha_2 \cdot O_2A \quad \text{y} \quad |\vec{A}_{an}| = \omega_2^2 \cdot O_2A$$

Por tanto la aceleraciones totales del punto A son totalmente conocidas tanto en módulo, dirección y sentido.

Por otro lado, teniendo en cuenta las aceleraciones relativas, sabemos que vectorialmente:

$$\vec{A}_b = \vec{A}_a + \vec{A}_{ba}$$

La cual podemos desarrollar en sus componentes:

$$\begin{matrix} \vec{A}_{bt} & + & \vec{A}_{bn} & = & [\vec{A}_{at} & + & \vec{A}_{an}] & + & [\vec{A}_{bat} & + & \vec{A}_{ban}] \end{matrix} \quad (3)$$

1 2 3 4 5 6

Cada uno de los 6 términos de la anterior ecuación vectorial, tiene a su vez dos componentes, por un lado su módulo, y por otro su dirección y sentido.

Vamos a ver que datos conocemos de cada uno de ellos:

- De 1 conocemos en principio solo la dirección.
- De 2 conocemos solo la dirección.
- De 3 conocemos el módulo y la dirección.
- De 4 conocemos el módulo y la dirección.
- De 5 conocemos en principio solo la dirección.
- De 6 conocemos solo la dirección.

Pero teniendo en cuenta el cálculo gráfico que hicimos anteriormente para el análisis de velocidades, de él obtuvimos tanto V_b como V_{ba} , las cuales nos van a permitir calcular el módulo de \vec{A}_{abn} y de \vec{A}_{bn} , a través de:

$$|\vec{A}_{ban}| = \omega_{32}^2 \cdot AB = (V_{ba} / AB)^2 \cdot AB = V_{ba}^2 / AB \quad (4)$$

Para calcular el módulo de \vec{A}_{bn} deberemos tener de nuevo en cuenta el estudio de las velocidades relativas, por ello partiremos de la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{A}_{bn} = \vec{A}_{an} + \vec{A}_{ban} \Rightarrow$$

$$|\vec{A}_{bn}| = \omega_2^2 \cdot O_2A + V_{ba}^2 / AB \quad (5)$$

en cuyas expresiones (4) y (5) todos los datos son conocidos.

Vamos a resumir, por tanto, en la siguiente tabla, los datos que conocemos, tanto en módulos y direcciones de la ecuación vectorial (3)

$$\vec{A}_{bt} \quad + \quad \vec{A}_{bn} \quad = \quad [\vec{A}_{at} \quad + \quad \vec{A}_{an}] \quad + \quad [\vec{A}_{bat} \quad + \quad \vec{A}_{ban}]$$

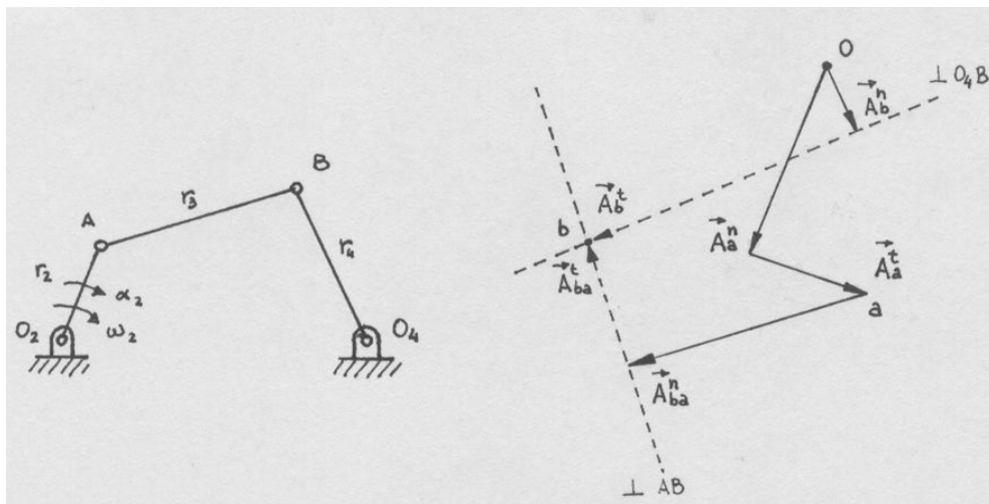
1
2
3
4
5
6

Módulo: $\omega_2^2 \cdot O_2A + V_{ba}^2 / AB$ $a_2 \cdot O_2A$ $\omega_2^2 \cdot O_2A$ V_{ba}^2 / AB

Dir. y sentido:

Para construir ahora el polígono de aceleraciones, seguiremos los siguientes pasos:

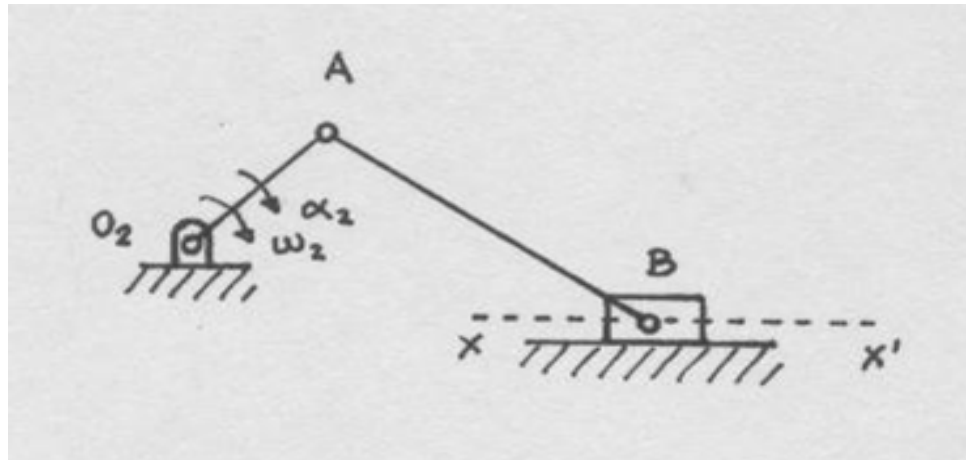
1. A escala y por un punto cualquiera [o] trazaremos \vec{A}_{at} y a continuación \vec{A}_{an} (al extremo de \vec{A}_a llamamos: [a]).
2. Por [a] trazamos a continuación el vector \vec{A}_{ban} según la dirección de AB.
3. Por el extremo del anterior vector trazaremos una perpendicular a AB.
4. Por O trazaremos el vector \vec{A}_{bn} según la dirección O_4B .
5. Por el extremo del anterior trazaremos una perpendicular a O_4B , y donde corte a la anterior perpendicular nos determinará [b], y con ello \vec{A}_{bt} y \vec{A}_{bat} .



1.3.2.- Mecanismo de biela manivela:

Vamos a analizar ahora las aceleraciones del mecanismo de biela-manivela, para ello partiremos de la siguiente figura, y supondremos en ella que en el eslabón O_2A (manivela) gira en un instante determinado con una velocidad angular ω_2 , al

someterlo a una aceleración angular α_2 constante en sentido horario



Igual que en el mecanismo de 4 barras, si analizamos la barra O_2A como un sólido rígido girando, con un movimiento de rotación pura alrededor de O_2 , tendremos que el vector aceleración total (\bar{A}_a) del punto A vendrá dado por la ecuación:

$$\bar{A}_a = \bar{A}_{at} + \bar{A}_{an} \quad (1)$$

donde \bar{A}_{at} y \bar{A}_{an} son las aceleraciones tangencial y normal respectivamente.

La dirección del vector \bar{A}_{at} será tangencial a la trayectoria, y su presencia es debida igualmente al cambio de velocidad angular en el tiempo. Mientras que la dirección del vector \bar{A}_{an} señala siempre al centro de rotación, y su presencia se debe a la dirección cambiante del vector velocidad.

Los módulos de las componentes tangencial y normal de la aceleración del punto A, recordando el estudio del “sólido rígido” vendrán dadas por las expresiones:

$$|\bar{A}_{at}| = \alpha_2 \cdot O_2A \quad \text{y} \quad |\bar{A}_{an}| = \omega_2^2 \cdot O_2A$$

Por tanto la aceleraciones totales del punto A son totalmente conocidas tanto en módulo, dirección y sentido.

Por otro lado, teniendo en cuenta las aceleraciones relativas, sabemos que vectorialmente:

$$\bar{A}_b = \bar{A}_a + \bar{A}_{ba} \quad (2)$$

Igual que hacíamos en el mecanismo de 4 barras, podemos desarrollar en sus componentes:

$$\bar{A}_b = [\bar{A}_{at} + \bar{A}_{an}] + [\bar{A}_{bat} + \bar{A}_{ban}] \quad (3)$$

1 2 3 4 5

de esta ecuación vectorial no conocemos el módulo de A_b pero sí la dirección, que será la recta XX'

Pero teniendo en cuenta los cálculos gráficos que hicimos anteriormente para el análisis de velocidades, de él obtuvimos tanto V_b como V_{ba} , las cuales nos van a permitir calcular el módulo de \bar{A}_{abn} y de \bar{A}_{bn} , a través de:

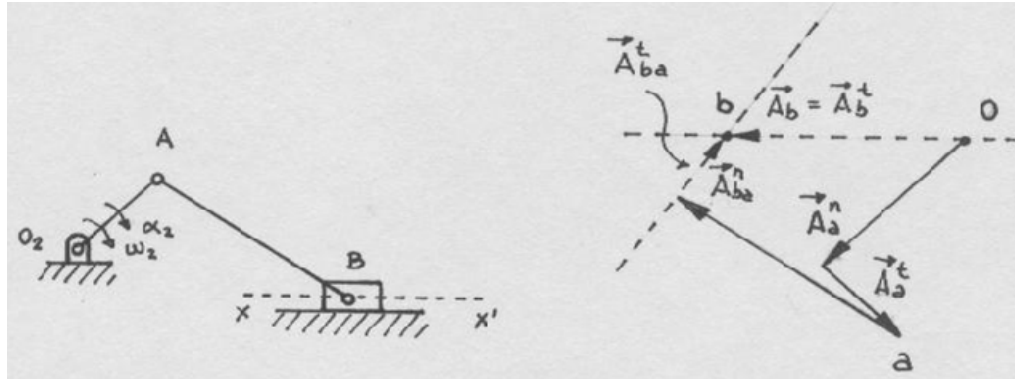
$$|\bar{A}_{ban}| = \omega_3^2 \cdot AB = (V_{ba} / AB)^2 \cdot AB = V_{ba}^2 / AB \quad (4)$$

Si marcamos ahora que parámetros de la ecuación (3) conocemos, tendremos que:

| | | | | | | | | |
|------------|-------------|-----------------|-----|-----------------|-----|------------------|-----|------------------|
| | \bar{A}_b | $[\bar{A}_{at}$ | $+$ | $\bar{A}_{an}]$ | $+$ | $[\bar{A}_{bat}$ | $+$ | $\bar{A}_{ban}]$ |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| M : | no | sí | sí | no | sí | | | |
| D : | sí | sí | sí | sí | sí | | | |

Con ellos y siguiendo los siguientes pasos:

1. A escala y por un punto cualquiera [o] trazaremos \bar{A}_{at} y a continuación \bar{A}_{an} (al extremo de A_a llamamos: [a]).
2. Por [a] trazamos a continuación el vector \bar{A}_{ban} según la dirección de AB.
3. Por el extremo del anterior vector trazaremos una perpendicular a AB.
4. Por O trazaremos una paralela a XX' , y donde corte a la anterior perpendicular nos determinará [b], y con ello \bar{A}_b .



2. Análisis cinemático de mecanismos planos. Métodos algebraicos clásicos.

Hasta ahora, hemos visto un método que nos permite conocer la posición, velocidad y aceleración de salida en función de un ángulo, velocidad y aceleración de entrada, pero para posiciones fijas y determinadas. Ahora bien cuando se necesita un estudio continuo del mecanismo durante un ciclo completo, es necesario recurrir a los llamados métodos analíticos, mediante los cuales podemos obtener los diagramas o cinemas de posición, velocidad y aceleración de salida, en función de estos mismos parámetros en la entrada. Es razonable pensar que estos métodos apoyados mediante programas de ordenador, nos faciliten enormemente la solución de las complejas ecuaciones que se necesitan resolver.

Pues bien, existen en el mercado diversos paquetes informáticos que permiten resolver los mecanismos más usuales en ingeniería, citaremos algunos de ellos, sin afán de citar a los mejores ni más conocidos: IMP (Integrated Mechanisms Program) distribuido por Dynamics Research Corporation, Winmecc 4.0 distribuido con el libro "Fundamentos de Teoría de Máquinas de Antonio Simón Matas de la Universidad de Málaga, Working Model de MSC Software, Mecan4 de Alfonso Hernández Frías de la Escuela de Ingenieros de Bilbao de distribución libre.

Los métodos en que se basan todos ellos en ecuaciones de cierre y adicionalmente en:

- El análisis trigonométrico.
- El análisis mediante números complejos.
- El análisis vectorial.

2.1.- Mecanismo de cuatro barras:

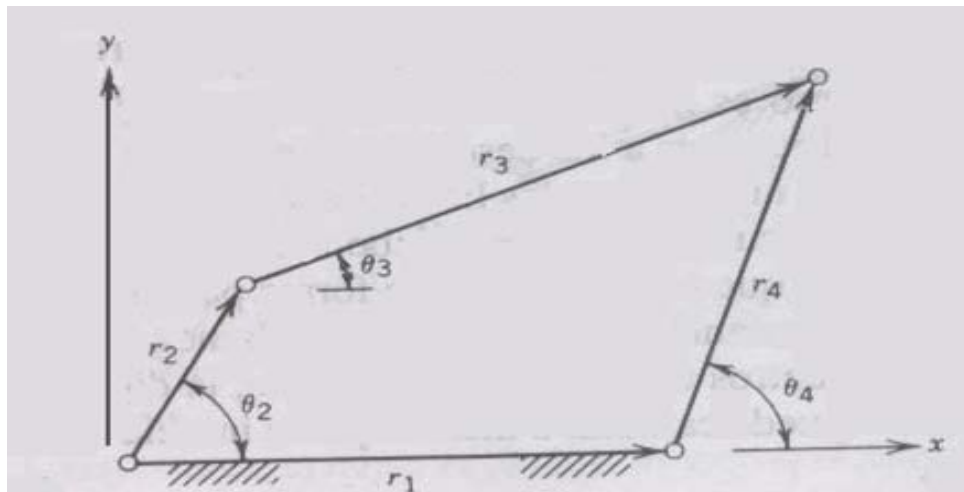
Son los procedimientos analíticos para encontrar los ángulos, velocidades y aceleraciones de salida variables, de un mecanismo de cuatro barras, en función de los datos de entrada.

2.1.1.- Posición mediante ecuaciones de cierre:

Si consideramos el mecanismo de cuatro barras de la figura, con el eje X a lo largo del eslabón r_1 (fijo), debido a que el mecanismo es cerrado, se cumplirá que:

$$\text{Sobre eje X: } r_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$\text{Sobre eje Y: } r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2 - r_3 \sin \theta_3 = 0$$



Este sistema de ecuaciones solo quedan satisfecho para aquellos valores de θ_3 y θ_4 que cierran el circuito del mecanismo, a esos valores se le conoce como raíces del sistema. Para otros valores de θ_3 y θ_4 diferentes, el sistema no queda satisfecho. En general podemos representar que:

$$r_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2 - r_3 \cos \theta_3 = f_1(\theta_3, \theta_4) = f_1(\theta)$$

$$r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2 - r_3 \sin \theta_3 = f_2(\theta_3, \theta_4) = f_2(\theta)$$

Donde utilizo para simplificar $\theta = (\theta_3, \theta_4)$

Con las raíces de las anteriores ecuaciones se cumplirá que $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$ son simultáneamente iguales a cero.

Para calcularlas podríamos utilizar el procedimiento de prueba y error, aunque lo más eficiente es utilizar una aproximación lineal de las funciones, para ir buscando soluciones sucesivas mejoradas.

Así supongamos que elegimos unos valores de θ_3, θ_4 arbitrarios, que por tanto no son raíces. Pero existirán unos $\Delta\theta_3, \Delta\theta_4$ que al sumarlos a θ_3, θ_4 nos darán las raíces. Es decir que ocurriera:

$$f_i(\theta_3 + \Delta\theta_3, \theta_4 + \Delta\theta_4) = f_i(\theta + \Delta\theta) = 0 \quad \text{para } i=1, 2$$

Una aproximación lineal válida para la resolución de estas ecuaciones, es sustituirlas previamente por su desarrollo en serie de Taylor, tomando los dos primeros términos:

$$f_i(\theta + \Delta\theta) = f_i(\theta) + \left(\frac{\delta f_i(\theta)}{\delta \theta_3} \right) \Delta\theta_3 + \left(\frac{\delta f_i(\theta)}{\delta \theta_4} \right) \Delta\theta_4$$

para $i = 1, 2$

Ahora podríamos calcular los valores de $\Delta\theta_3$ y $\Delta\theta_4$ que lleven la función lineal a cero. Si la función lineal es una aproximación razonable a la función original, las raíces de la lineal harán que la función original sea aproximadamente cero:

$$f_i(\theta) + \left(\frac{\delta f_i(\theta)}{\delta \theta_3} \right) \Delta\theta_3 + \left(\frac{\delta f_i(\theta)}{\delta \theta_4} \right) \Delta\theta_4 = 0, \quad \text{para } i=1, 2$$

desdoblado de nuevo i , tendremos:

$$\left(\frac{\delta f_1(\theta)}{\delta \theta_3}\right) \Delta \theta_3 + \left(\frac{\delta f_1(\theta)}{\delta \theta_4}\right) \Delta \theta_4 = -f_1(\theta) \quad (5)$$

$$\left(\frac{\delta f_2(\theta)}{\delta \theta_3}\right) \Delta \theta_3 + \left(\frac{\delta f_2(\theta)}{\delta \theta_4}\right) \Delta \theta_4 = -f_2(\theta) \quad (6)$$

Sistema de dos ecuaciones que nos dará los valores de $\Delta \theta_3$ y $\Delta \theta_4$ que lleven la función lineal a cero.

Teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{\delta f_1(\theta)}{\delta \theta_3}\right) = r_3 \operatorname{sen} \theta_3$$

$$\left(\frac{\delta f_1(\theta)}{\delta \theta_4}\right) = -r_4 \operatorname{sen} \theta_4$$

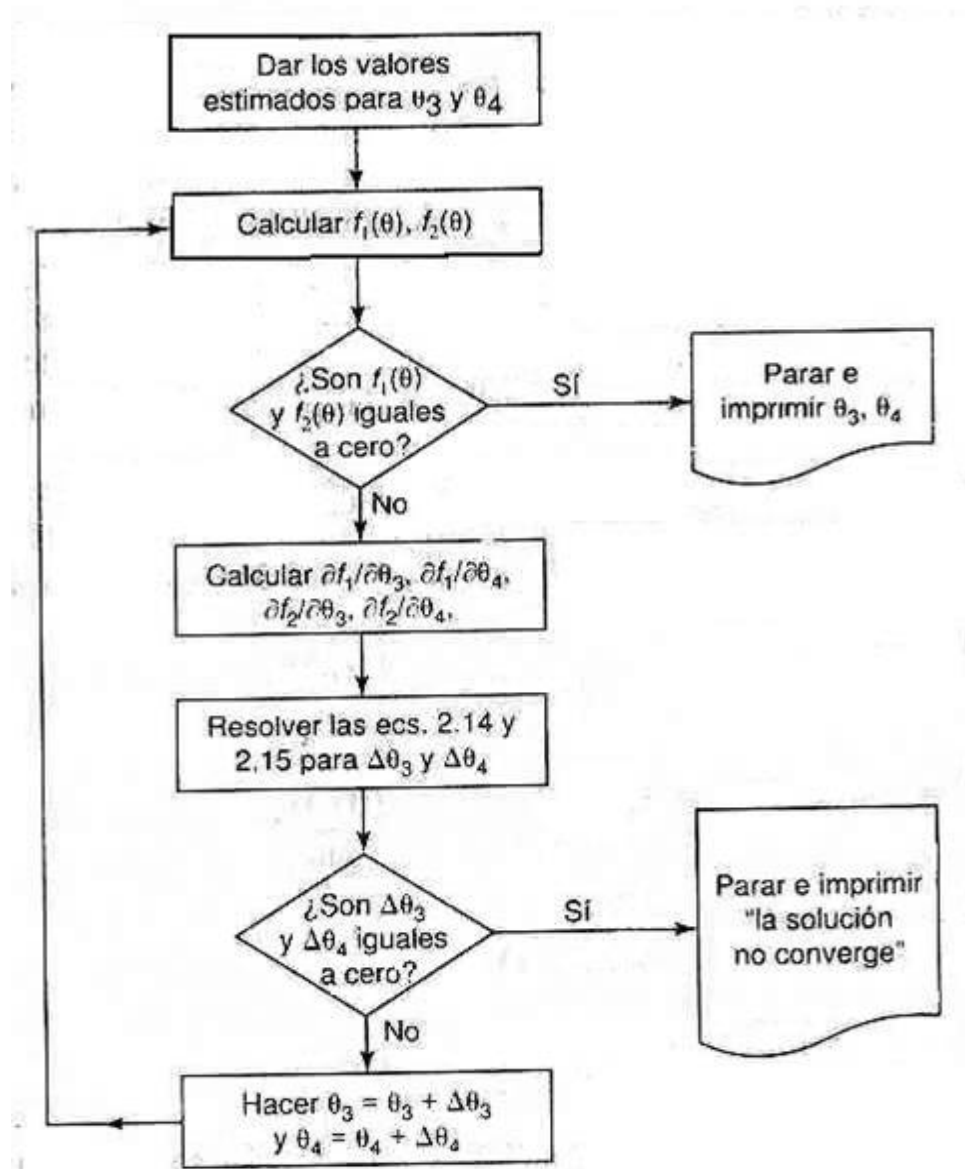
$$\left(\frac{\delta f_2(\theta)}{\delta \theta_3}\right) = -r_3 \operatorname{cos} \theta_3$$

$$\left(\frac{\delta f_2(\theta)}{\delta \theta_4}\right) = r_4 \operatorname{cos} \theta_4$$

Y sustituyendo en (5) y (6), puedo calcular los valores de $\Delta \theta_3$ y $\Delta \theta_4$ que sumados a θ_3 y θ_4 que me aproximan la función lineal a cero. Si con estos valores reiteramos el proceso varias veces, al final obtendremos las raíces reales de la función original.

Si esta técnica numérica que acabamos de ver (Newton-Raphson) la aplicamos mediante un procesador, obtendremos las raíces de la ecuación de posición del mecanismo en cualquier posición.

El conjunto del proceso iterativo de esta técnica lo podemos resumir en el siguiente diagrama flujo, para el método de Newton-Raphson:

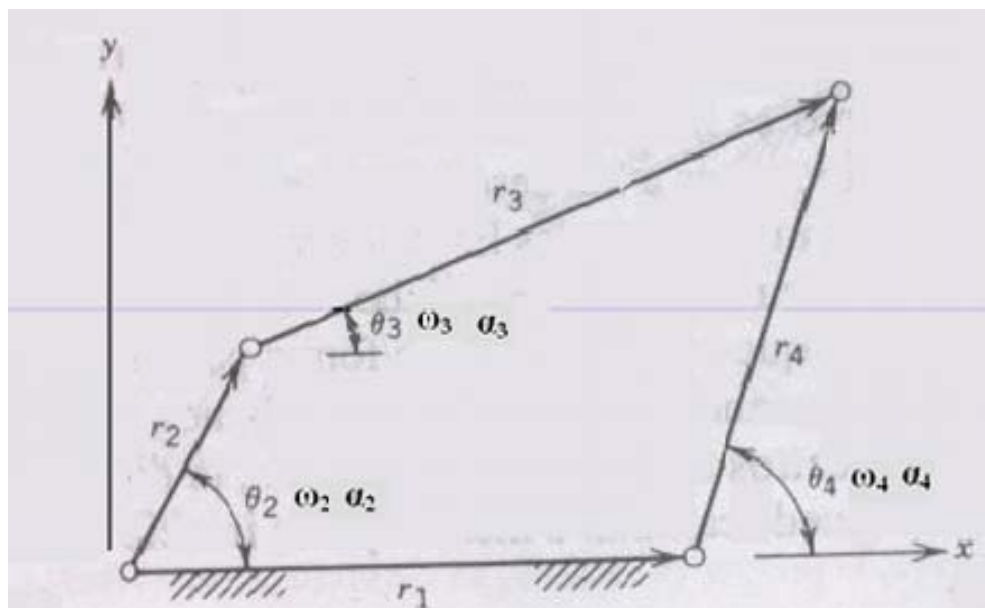


2.1.2.- Velocidad, Mediante ecuaciones de cierre y números complejos:

Como indicaba anteriormente, el análisis lo podemos llevar a cabo mediante métodos: trigonométricos, números complejos, o análisis vectorial. El primero y el tercero, tiene la ventaja de que no perdemos la visión cinemática del problema, pero tienen el inconveniente de la complejidad de su resolución. Por contra el análisis mediante número complejos, tiene un sencillo planteamiento y resolución, aunque perdemos algo de la visión cinemática durante la resolución de las ecuaciones.

Además facilita el tratamiento mediante ordenador, basándose en él muchos de los paquetes de software que resuelven los mecanismos más usuales.

Volvamos al mecanismo de cuatro barras de la figura:



La ecuación de cierre del circuito, para este mecanismo, escrita en forma de números complejos es:

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} - r_1 = 0 \quad (1)$$

derivando dos veces respecto al tiempo obtendremos:

$$i\omega_2 r_2 e^{i\theta_2} + i\omega_3 r_3 e^{i\theta_3} - i\omega_4 r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (2)$$

$$-\omega_2^2 r_2 e^{i\theta_2} + i\alpha_2 r_2 e^{i\theta_2} - \omega_3^2 r_3 e^{i\theta_3} + i\alpha_3 r_3 e^{i\theta_3} + \omega_4^2 r_4 e^{i\theta_4} - i\alpha_4 r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (3)$$

Obteniendo las ecuaciones complejas (1), (2) y (3).

Si (1) la desarrollamos en su parte real e imaginaria tendremos:

$$\begin{aligned}r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 - r_1 &= 0 \\r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 - r_4 \operatorname{sen} \theta_4 &= 0\end{aligned}$$

Que coinciden con las ecuaciones que vimos anteriormente, cuando realizamos el análisis de posición. En ellas son conocidos los siguientes datos: r_1, r_2, r_3, r_4 y θ_2 y las incógnitas son θ_3 y θ_4 .

Si igual que hicimos con (1), ahora desarrollamos (2) en su parte real e imaginaria tendremos:

$$\begin{aligned}-r_2(\operatorname{sen} \theta_2)\omega_2 - r_3(\operatorname{sen} \theta_3)\omega_3 + r_4(\operatorname{sen} \theta_4)\omega_4 &= 0 \\r_2(\cos \theta_2)\omega_2 + r_3(\cos \theta_3)\omega_3 - r_4(\cos \theta_4)\omega_4 &= 0\end{aligned}$$

Sistema de dos ecuaciones, en donde los datos son: $r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, y ω_2 y las incógnitas son: ω_3 y ω_4 . Los valores de θ_3, θ_4 , son datos, porque los debemos haber determinado con el análisis de posición visto anteriormente.

Las anteriores ecuaciones las podemos expresar de manera simplificada como:

$$\begin{aligned}A \omega_3 + B \omega_4 &= C \\D \omega_3 + E \omega_4 &= F \quad \text{donde:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= -r_3(\operatorname{sen} \theta_3) \\B &= r_4(\operatorname{sen} \theta_4) \\C &= r_2(\operatorname{sen} \theta_2)\omega_2 \\D &= r_3(\cos \theta_3) \\E &= -r_4(\cos \theta_4) \\F &= -r_2(\cos \theta_2)\omega_2\end{aligned}$$

Tal como he expresado, el sistema anterior es un sistema de ecuaciones lineales, en donde si operamos, podemos calcular las incógnitas: ω_3 y ω_4 , que vendrán dadas por:

$$\omega_3 = (FB - EC)/(DB - EA)$$

$$\omega_4 = (DC - FA)/(DB - EA)$$

que después de sustituir y operar, llegaríamos a los valores siguientes:

$$\omega_3 = - (r_2/r_3) \cdot [\text{sen}(\theta_2 - \theta_4) / \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)] \cdot \omega_2$$

$$\omega_4 = (r_2/r_4) \cdot [\text{sen}(\theta_2 - \theta_3) / \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)] \cdot \omega_2$$

Que solucionan nuestro análisis de velocidad para el mecanismo de cuatro barras.

2.1.3.- Aceleración, mediante ecuaciones de cierre y números complejos:

Para el análisis de aceleración, partiremos de la ecuación (3), del apartado 2.1.2. anterior, que obtuvimos después de derivar dos veces la ecuación de posición, es decir:

$$-\omega_2^2 r_2 e^{i\theta_2} + i\alpha_2 r_2 e^{i\theta_2} - \omega_3^2 r_3 e^{i\theta_3} + i\alpha_3 r_3 e^{i\theta_3} + \omega_4^2 r_4 e^{i\theta_4} - i\alpha_4 r_4 e^{i\theta_4} = 0$$

Si igual que hemos hecho con la velocidad, la desarrollamos en su parte real, y en su parte imaginaria, tendremos:

$$-r_2(\cos\theta_2)\omega_2^2 - r_2(\text{sen}\theta_2)\alpha_2 - r_3(\cos\theta_3)\omega_3^2 - r_3(\text{sen}\theta_3)\alpha_3 + r_4(\cos\theta_4)\omega_4^2 + r_4(\text{sen}\theta_4)\alpha_4 = 0$$

$$-r_2(\text{sen}\theta_2)\omega_2^2 + r_2(\cos\theta_2)\alpha_2 - r_3(\text{sen}\theta_3)\omega_3^2 + r_3(\cos\theta_3)\alpha_3 + r_4(\text{sen}\theta_4)\omega_4^2 - r_4(\cos\theta_4)\alpha_4 = 0$$

Sistema de dos ecuaciones, en donde los datos son: $r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ y α_2 y las incógnitas son: α_3 , y α_4 . Teniendo en cuenta que los valores de ω_3 y ω_4 los debemos haber determinado antes, mediante el análisis de velocidad.

Si el anteriormente, durante el análisis de velocidad, el sistema de ecuaciones lo expresábamos de manera simplificada, aquí en el de aceleraciones haremos algo similar:

$$\begin{aligned} A \alpha_3 + B \alpha_4 &= C' \\ D \alpha_3 + E \alpha_4 &= F' \quad \text{donde aquí:} \end{aligned}$$

$$A = -r_3(\sin \theta_3)$$

$$B = r_4(\sin \theta_4)$$

$$C' = r_2(\cos \theta_2)\omega_2^2 + r_2(\sin \theta_2)\alpha_2 + r_3(\cos \theta_3)\omega_3^2 - r_4(\cos \theta_4)\omega_4^2$$

$$D = r_3(\cos \theta_3)$$

$$E = -r_4(\cos \theta_4)$$

$$F' = r_2(\sin \theta_2)\omega_2^2 - r_2(\cos \theta_2)\alpha_2 + r_3(\sin \theta_3)\omega_3^2 - r_4(\sin \theta_4)\omega_4^2$$

Sistema de ecuaciones lineales, en donde si operamos, podemos calcular las incógnitas: α_3 y α_4 , que vendrán dadas por:

$$\alpha_3 = (F'B - EC')/(DB - EA)$$

$$\alpha_4 = (DC' - F'A)/(DB - EA)$$

que después de sustituir y operar, llegaríamos a los valores siguientes:

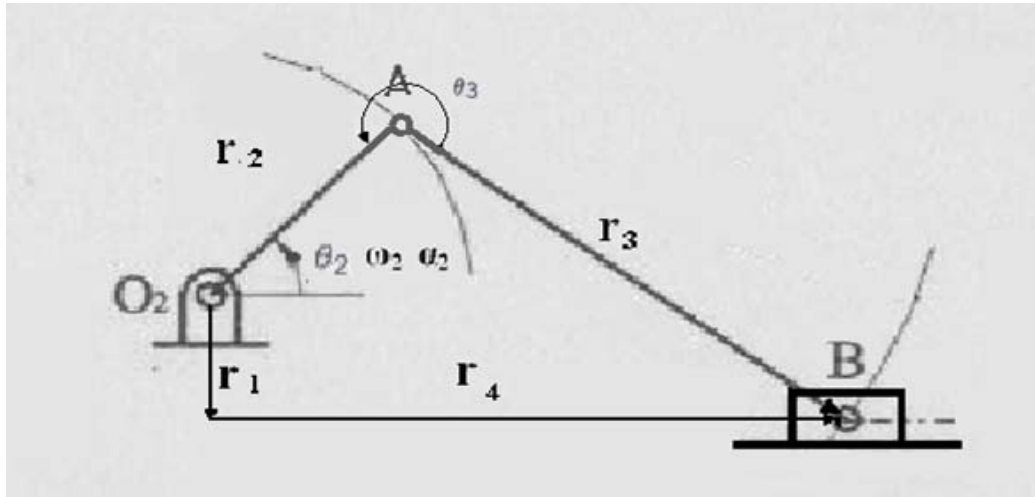
$$\alpha_3 = \alpha_2 \cdot (\omega_3/\omega_2) - \{[r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2-\theta_4) + r_3\omega_3^2 \cos(\theta_3-\theta_4) + r_4\omega_4^2] / r_3 \sin(\theta_3-\theta_4)\}$$

$$\alpha_4 = \alpha_2 \cdot (\omega_4/\omega_2) + \{[r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2-\theta_3) + r_4\omega_4^2 \cos(\theta_3-\theta_4) + r_3\omega_3^2] / r_4 \sin(\theta_3-\theta_4)\}$$

Que solucionan nuestro análisis de aceleración para el mecanismo de cuatro barras.

2.2.- Mecanismo de biela-manivela:

Igual que hemos analizado el mecanismo de cuatro barras, podemos analizar el mecanismo de biela-manivela tal como el representado en la siguiente figura:



2.2.1.- Posición mediante ecuaciones de cierre, y números complejos:

Para el análisis de posición del mecanismo de biela-manivela, plantearemos igualmente la ecuación de cierre:

$$r_1 + r_4 = r_2 + r_3$$

que podemos expresar en coordenadas polares, quedando:

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_4 e^{i\theta_4} = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3}$$

Desarrollando ésta en su parte real y en su parte imaginaria, tendremos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_4 &= r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \\ -r_1 &= r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 \end{aligned}$$

Sistema de dos ecuaciones, que nos permiten obtener los valores de r_4 y θ_3 en función de θ_2 , r_1 , r_2 y r_3 . Y resolviéndolo, obtengo que:

$$\begin{aligned} r_4 &= r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \\ \theta_3 &= \arcsin \left[- (r_1 + r_2 \sin \theta_2) / r_3 \right] \end{aligned}$$

Que soluciona nuestro análisis de posición de los eslabones, en el mecanismo de biela-manivela.

2.2.2.- Velocidad mediante ecuaciones de cierre y números complejos:

Si derivamos una vez con respecto a (t) la ecuación de cierre expresada en coordenadas polares tendremos:

$$v_4 e^{i\theta_4} = i \omega_2 r_2 e^{i\theta_2} + i \omega_3 r_3 e^{i\theta_3}$$

Que desarrollando ésta igualmente en su parte real y en su parte imaginaria, tendremos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_4 \cos\theta_4 &= -\omega_2 r_2 \sin\theta_2 - \omega_3 r_3 \sin\theta_3 \\ V_4 \sin\theta_4 &= \omega_2 r_2 \cos\theta_2 + \omega_3 r_3 \cos\theta_3 \end{aligned}$$

que operando y sustituyendo quedarían como:

$$\begin{aligned} V_4 &= -\omega_2 r_2 \sin\theta_2 - \omega_3 r_3 \sin\theta_3 \\ 0 &= \omega_2 r_2 \cos\theta_2 + \omega_3 r_3 \cos\theta_3 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones a través del cual podemos calcular V_4 y ω_3 en función de r_2 , r_3 , θ_2 , θ_3 y ω_2 . Resolviéndolo llegamos a que:

$$\begin{aligned} V_4 &= -\omega_2 r_2 \sin\theta_2 - \omega_3 r_3 \sin\theta_3 \\ \omega_3 &= -(\omega_2 r_2 \cos\theta_2) / r_3 \cos\theta_3 \end{aligned}$$

que solucionan nuestro análisis de velocidad para el mecanismo de biela-manivela.

2.2.3.- Aceleraciones mediante ecuaciones de cierre y números complejos:

Para el análisis de aceleraciones, derivaremos con respecto (t) dos veces la ecuación de cierre, expresada en coordenadas polares, obteniendo:

$$a_4 e^{i\theta_4} = -\omega_2^2 r_2 e^{i\theta_2} + i\alpha_2 r_2 e^{i\theta_2} - \omega_3^2 r_3 e^{i\theta_3} + i\alpha_3 r_3 e^{i\theta_3}$$

que desarrollando ésta igualmente en su parte real y en su parte imaginaria, tendremos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 a_4 &= -\omega_2^2 \cos\theta_2 - \alpha_2 r_2 \sin\theta_2 - \omega_3^2 r_3 \cos\theta_3 - \alpha_3 r_3 \sin\theta_3 \\
 0 &= \omega_2^2 \sin\theta_2 + \alpha_2 r_2 \cos\theta_2 + \omega_3^2 r_3 \sin\theta_3 + \alpha_3 r_3 \cos\theta_3
 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones a través del cual podemos calcular a_4 y α_3 en función de r_2 , r_3 , θ_2 , θ_3 , ω_2 , ω_3 . Resolviéndolo llegamos a que:

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 &= [\omega_2^2 \sin\theta_2 + \alpha_2 r_2 \cos\theta_2 - \omega_3^2 r_3 \sin\theta_3] / r_3 \cos\theta_3 \\
 \alpha_4 &= -r_2 \cos\theta_2 - \alpha_2 r_2 \sin\theta_2 - \omega_3^2 r_3 \cos\theta_3 - \alpha_3 r_3 \sin\theta_3
 \end{aligned}$$

que solucionan nuestro análisis de aceleración para el mecanismo de biela-manivela.